

# L'HYPOTHESE DE RIEMANN

## 1) Identité d'Euler

Euler a démontré la formule de zéta à partir de la série :

$$1 + 1/x + 1/x^2 + 1/x^3 + \dots + 1/x^n$$

Pour que cette relation soit convergente et égale à  $1/(1 - 1/x)$ , il faut que  $1/x^n$  tende vers 0 ; c'est à dire module de  $x > 1$ .

En faisant  $x = 2^s$ , avec  $s = a + ib$  nous devons avoir [module de  $2^s$ ]  $> 1$  c'est à dire  $2^a > 1$  ou  $a > 0$ , on obtient la somme des puissances inverses de 2 :

$$1 + 1/2^s + 1/4^s + 1/8^s + \dots + 1/2^{\alpha s} = 1/(1 - 1/2^s)$$

En faisant  $x = 3^s$ , avec  $s = a + ib$  nous devons avoir [module de  $3^s$ ]  $> 1$  c'est à dire  $3^a > 1$  ou  $a > 0$ , on obtient la somme des puissances inverses de 3 :

$$1 + 1/3^s + 1/9^s + 1/27^s + \dots + 1/3^{\beta s} = 1/(1 - 1/3^s)$$

En faisant le produit de ces 2 fonctions, on obtient la somme des puissances de toutes les fractions dont le dénominateur est un produit de 2 et 3.

$$1 + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s + 1/6^s + 1/8^s + \dots = 1/(1 - 1/2^s) * [1/(1 - 1/3^s)]$$

Après avoir fait  $x = 2^s$ , puis  $x = 3^s$ , si nous faisons  $x = 5^s$ , puis  $x = 7^s$ , ..... avec l'ensemble des nombres premiers ; puis en faisant leur produit, nous obtenons l'identité d'EULER

$$\xi(s) = 1 + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s + 1/5^s + 1/6^s + 1/7^s + \dots =$$

$$1/(1 - 1/2^s) * [1/(1 - 1/3^s)] * [1/(1 - 1/5^s)] * [1/(1 - 1/7^s)] * [\dots], \text{ avec } s = a + ib \text{ et } a > 0,$$

Lorsque [module de  $2^s$ ]  $> 1$ , avec  $a > 0$ , cette fonction zéta peut-elle être égale à 0 ?

Nous allons étudier la représentation des différents termes  $[1/(1 - 1/2^s)]$  ;  $[1/(1 - 1/3^s)]$  ;  $[1/(1 - 1/5^s)]$  ;  $[1/(1 - 1/7^s)]$  ; .....

## 2) Représentation de $[1/(1 - 1/2^s)]$

L'annexe jointe donne la représentation de différents vecteurs dans un repère orthonormé ayant l'axe des réels en abscisse et l'axe des imaginaires en ordonnée  $O_{21}(0,0)$  et  $O_{22}(1,0)$ .

Considérons le terme  $2^s$  et posons  $s = a + ib$

$2^s = e^{(a+ib)\text{Log } 2}$  est représenté par un vecteur  $\vec{O_{21}A_2}$  ;  $A_2$  est sur le cercle de centre  $O_{21}(0, 0)$  et de rayon  $R_{21} = 2^a$ .

Le module et l'argument de  $\vec{O_{21}A_2}$  ont pour valeurs  $\rho_{21} = 2^a$  (plus grand que 1) et  $\phi_{21} = \text{arctg } b\text{Log } 2$ .

$1/2^s$  est représenté par un vecteur  $\vec{O_{21}B_2}$ ,  $B_2$  est sur le cercle de centre  $O_{21}(0,0)$  et de rayon  $R_{22} = 1/2^a$ .

Le module et l'argument de  $\vec{O_{21}B_2}$  ont pour valeurs  $\rho_{22} = 1/2^a$  (plus petit que 1) et  $\phi_{22} = - \text{arctg } b\text{Log } 2$ .

$1 - 1/2^s$  est représenté par un vecteur  $\vec{O_{21}C_2}$ ,  $O_{21}(0,0)$  et  $C_2$  est sur le cercle de centre  $O_{22}(1, 0)$  et de rayon  $R = 1/2^a$

Compte tenu de  $\vec{O_{21}C_2}$ , son module et son argument ont pour valeurs telles que  $1 - 1/2^a \leq \rho_{23} \leq 1 + 1/2^a$  et  $-\text{arc sin } 1/2^a \leq \phi_{23} \leq \text{arc sin } 1/2^a$ . Lorsque  $b$  varie régulièrement de 0 à l'infini, le point  $C_2$  se déplace

# L'HYPOTHESE DE RIEMANN

sur le cercle de centre  $O_{22}(1, 0)$  et de rayon  $R = 1/2^a$ .

Soit  $H_2$  le point de tangence à ce même cercle de la droite issue de  $O_{21}$ , nous savons que si une droite issue d'un point  $O_{21}$  coupe un cercle aux points  $C_2$  et  $D_2$ , le produit  $\overline{O_{21}C_2} \cdot \overline{O_{21}D_2} = (\overline{O_{21}H_2})^2$ .

Il en résulte que si la droite issue de  $O_{21}$  coupe le cercle de centre  $O_{22}$  en  $C_2$  et  $D_2$ , le produit  $\overline{O_{21}C_2} \cdot \overline{O_{21}D_2} = (\overline{O_{21}H_2})^2 = 1 - (1/2^a)^2$ .

$C_2$  étant sur le cercle de centre  $O_{22}(1, 0)$  et de rayon  $R = 1/2^a$ ,  $D_2$  est tel que

$$\overline{O_{21}D_2} = [1 - (1/2^a)^2] / \overline{O_{21}C_2}.$$

Pour obtenir  $\overline{O_{21}E_2} = 1/\overline{O_{21}C_2}$ , nous devons effectuer une homothétie de  $O_{21}C_2$  dans le rapport  $1/[1 - (1/2^a)^2]$

Nous savons que les représentations de  $1 - 1/2^s$  et de  $1/(1 - 1/2^s)$  sont tels que le produit des modules est égale à 1, et leurs arguments sont égaux mais de signes contraires, nous en déduisons la représentation de  $1/(1 - 1/2^s)$  qui est un vecteur  $\overrightarrow{O_{21}F_2}$ ,  $O_{21}(0,0)$  et  $F_2$  est sur le cercle de centre  $O_{23}(1/[1 - (1/2^a)^2], 0)$  et de rayon  $R = [1/(2^a)]/[1 - (1/2^a)^2]$

Le module et l'argument de  $\overrightarrow{O_{21}F_2}$  ont pour valeurs telles que  $[1 - 1/2^a]/[1 - (1/2^a)^2] \leq \rho_{24} \leq [1 + 1/2^a]/[1 - (1/2^a)^2]$  et  $-\arcsin 1/2^a \leq \phi_{24} \leq \arcsin 1/2^a$ .

Nous avons posé [module de  $2^s$ ]  $> 1$  plus grand que 0, donc  $a$  est aussi plus grand que 0, et  $1/2^a$  est toujours plus petit que 1. Le dénominateur  $[1 - (1/2^a)^2]$  et le numérateur allant de  $(1 - 1/2^a)$  à  $(1 + 1/2^a)$  sont toujours positifs, nous pouvons simplifier pour dire que le module de  $O_{21}F_2$  a pour valeur telle que  $1/[1 + 1/2^a] \leq \rho_{24} \leq 1/[1 - 1/2^a]$

$a$  est positif et lorsque  $a$  varie de  $> 0$  à l'infini,  $1/2^a$  est une fonction continue décroissante qui varie de  $< 1$  à 0.

Lorsque  $1/2^a$  varie de  $< 1$  à 0,  $1/[1 + 1/2^a]$  est une fonction continue croissante qui varie de  $> 1/2$  à 1, et  $1/[1 - 1/2^a]$  est une fonction continue décroissante qui varie de l'infini à 1

Il en résulte que le module du vecteur  $\overrightarrow{O_{21}F_2}$  est donc toujours supérieur à  $1/2$ .

### 3) Représentation de $[1/(1 - 1/3^s)]$

Dans l'annexe jointe, nous avons vu la représentation des différents vecteurs concernés du paragraphe 2. Dans cette annexe, si nous remplaçons le premier chiffre en indice des différents points (le nombre 2) par le nombre 3, nous avons les représentations des différents vecteurs concernés de ce présent paragraphe.

Considérons le terme  $3^s$  et posons  $s = a + ib$   
 $3^s = e^{(a+ib)\text{Log } 3}$  est représenté par un vecteur  $\overrightarrow{O_{31}A_3}$ ;  $A_3$  est sur le cercle de centre  $O_{31}(0, 0)$  et de rayon  $R_{31} = 3^a$ .

Le module et l'argument de  $\overrightarrow{O_{31}A_3}$  ont pour valeurs  $\rho_{31} = 3^a$  (plus grand que 1) et  $\phi_{31} = \text{arctg } b\text{Log } 3$ .

$1/3^s$  est représenté par un vecteur  $\overrightarrow{O_{31}B_3}$ ,  $B_3$  est sur le cercle de centre  $O_{31}(0,0)$  et de rayon  $R_{32} = 1/3^a$ .

Le module et l'argument de  $\overrightarrow{O_{31}B_3}$  ont pour valeurs  $\rho_{32} = 1/3^a$  (plus petit que 1) et  $\phi_{32} = -\text{arctg } b\text{Log } 3$ .

$1 - 1/3^s$  est représenté par un vecteur  $\overrightarrow{O_{31}C_3}$ ,  $O_{31}(0,0)$  et  $C_3$  est sur le cercle de centre  $O_{32}(1, 0)$  et de rayon

# L'HYPOTHESE DE RIEMANN

$$R = 1/3^a$$

Compte tenu de  $O_{31}C_3$ , son module et son argument ont pour valeurs telles que  $1 - 1/3^a \leq \rho_{33} \leq 1 + 1/3^a$  et  $-\arcsin 1/3^a \leq \phi_{33} \leq \arcsin 1/3^a$ .

Nous savons que si une droite issue d'un point  $O_{31}$  coupe un cercle aux points  $C_3$  et  $D_3$ , le produit  $\overline{O_{31}C_3} \cdot \overline{O_{31}D_3} = (O_{31}H_3)^2$ ,  $H_3$  étant le point de tangence à ce même cercle de la droite issue de  $O_{31}$ .

Il en résulte que si la droite issue de  $O_{31}$  coupe le cercle de centre  $O_{31}$  en  $C_3$  et  $D_3$ , le produit  $\overline{O_{31}C_3} \cdot \overline{O_{31}D_3} = (O_{31}H_3)^2 = 1 - (1/3^a)^2$ .

$C_3$  étant sur le cercle de centre  $O_{32}(1, 0)$  et de rayon  $R = 1/3^a$ ,  $D_3$  est tel que

$$\overline{O_{31}D_3} = [1 - (1/3^a)^2] / \overline{O_{31}C_3}.$$

Pour obtenir  $\overline{O_{31}E_3} = 1/\overline{O_{31}C_3}$ , nous devons effectuer une homothétie de  $O_{31}C_3$  dans le rapport  $1/[1 - (1/3^a)^2]$

Nous savons que les représentations de  $1 - 1/3^s$  et de  $1/(1 - 1/3^s)$  sont tels que le produit des modules est égale à 1, et leurs arguments sont égaux mais de signes contraires, nous en déduisons la représentation de  $1/(1 - 1/3^s)$  qui est un vecteur  $\overline{O_{31}F_3}$ ,  $O_{31}(0,0)$  et  $F_3$  est sur le cercle de centre  $O_{33}(1/[1 - (1/3^a)^2], 0)$  et de rayon  $R = [1/(3^a)]/[1 - (1/3^a)^2]$

Le module et l'argument de  $\overline{O_{31}F_3}$  ont pour valeurs telles que  $[1 - 1/3^a]/[1 - (1/3^a)^2] \leq \rho_{34} \leq [1 + 1/3^a]/[1 - (1/3^a)^2]$  et  $-\arcsin 1/3^a \leq \phi_{34} \leq \arcsin 1/3^a$ .

Nous avons posé [module de  $3^s$ ]  $> 1$  plus grand que 0, donc  $a$  est aussi plus grand que 0, et  $1/3^a$  est toujours plus petit que 1. Le dénominateur  $[1 - (1/3^a)^2]$  et le numérateur allant de  $(1 - 1/3^a)$  à  $(1 + 1/3^a)$  sont toujours positifs, nous pouvons simplifier pour dire que le module de  $\overline{O_{31}F_3}$  a pour valeur telle que  $1/[1 + 1/3^a] \leq \rho_{34} \leq 1/[1 - 1/3^a]$

$a$  est positif,  $0 < a < \infty$ , et donc  $0 < 1/3^a < 1$ , puis  $1 < 1 + 1/3^a < 2$ , et  $0 < 1/[1 - 1/3^a] < \infty$

Lorsque  $a$  varie de 0 à l'infini,

$$1 < 1/[1 + 1/3^a] < 1/2,$$

Lorsque  $1/3^a$  varie de  $< 1$  à 0,  $1/[1 + 1/3^a]$  est une fonction continue croissante qui varie de  $> 1/2$  à 1, et  $1/[1 - 1/3^a]$  est une fonction continue décroissante qui varie de l'infini à 1

Il en résulte que le module du vecteur  $\overline{O_{31}F_3}$  est donc toujours supérieur à  $1/2$ .

## **4) Représentation de $[1/(1 - 1/5^s)]$**

Dans l'annexe jointe, nous avons vu la représentation des différents vecteurs concernés du paragraphe 2. Dans cette annexe, si nous remplaçons le premier chiffre en indice des différents points (le nombre 2) par le nombre 5, nous avons les représentations des différents vecteurs concernés de ce présent paragraphe.

Considérons le terme  $5^s$  et posons  $s = a + ib$

$5^s = e^{(a+ib)\text{Log } 5}$  est représenté par un vecteur  $\overline{O_{51}A_5}$ ;  $A_5$  est sur le cercle de centre  $O_{51}(0, 0)$  et de rayon  $R_{51} = 5^a$ .

Le module et l'argument de  $\overline{O_{51}A_5}$  ont pour valeurs  $\rho_{51} = 5^a$  (plus grand que 1) et  $\phi_{51} = \arctg b\text{Log } 5$ .

$1/5^s$  est représenté par un vecteur  $\overline{O_{51}B_5}$ ,  $B_5$  est sur le cercle de centre  $O_{51}(0,0)$  et de rayon  $R_{52} = 1/5^a$ .

# L'HYPOTHESE DE RIEMANN

Le module et l'argument de  $\overrightarrow{O_{51}B_5}$  ont pour valeurs  $\rho_{52} = 1/5^a$  (plus petit que 1) et  $\phi_{52} = -\text{arctg } b \text{Log } 5$ .

$1 - 1/5^s$  est représenté par un vecteur  $\overrightarrow{O_{51}C_5}$ ,  $O_{51}(0,0)$  et  $C_5$  est sur le cercle de centre  $O_{52}(1, 0)$  et de rayon  $R = 1/5^a$

Compte tenu de  $\overrightarrow{O_{51}C_5}$ , son module et son argument ont pour valeurs telles que  $1 - 1/5^a \leq \rho_{53} \leq 1 + 1/5^a$  et  $-\text{arc sin } 1/5^a \leq \phi_{53} \leq \text{arc sin } 1/5^a$ .

Nous savons que si une droite issue d'un point  $O_{51}$  coupe un cercle aux points  $C_5$  et  $D_5$ , le produit  $\overline{O_{51}C_5} \cdot \overline{O_{51}D_5} = (\overline{O_{51}H_5})^2$ ,  $H_5$  étant le point de tangence à ce même cercle de la droite issue de  $O_{51}$ .

Il en résulte que si la droite issue de  $O_{51}$  coupe le cercle de centre  $O_{51}$  en  $C_5$  et  $D_5$ , le produit  $\overline{O_{51}C_5} \cdot \overline{O_{51}D_5} = (\overline{O_{51}H_5})^2 = 1 - (1/5^a)^2$ .

$C_5$  étant sur le cercle de centre  $O_{52}(1, 0)$  et de rayon  $R = 1/5^a$ ,  $D_5$  est tel que

$$\overline{O_{51}D_5} = [1 - (1/5^a)^2] / \overline{O_{51}C_5}.$$

Pour obtenir  $\overline{O_{51}E_5} = 1/\overline{O_{51}C_5}$ , nous devons effectuer une homothétie de  $O_{51}C_5$  dans le rapport  $1/[1 - (1/5^a)^2]$

Nous savons que les représentations de  $1 - 1/5^s$  et de  $1/(1 - 1/5^s)$  sont tels que le produit des modules est égale à 1, et leurs arguments sont égaux mais de signes contraires, nous en déduisons la représentation de  $1/(1 - 1/5^s)$  qui est un vecteur  $\overrightarrow{O_{51}F_5}$ ,  $O_{51}(0,0)$  et  $F_5$  est sur le cercle de centre  $O_{53}(1/[1 - (1/5^a)^2], 0)$  et de rayon  $R = [1/(5^a)]/[1 - (1/5^a)^2]$

Le module et l'argument de  $\overrightarrow{O_{51}F_5}$  ont pour valeurs telles que  $[1 - 1/5^a]/[1 - (1/5^a)^2] \leq \rho_{54} \leq [1 + 1/5^a]/[1 - (1/5^a)^2]$  et  $-\text{arc sin } 1/5^a \leq \phi_{54} \leq \text{arc sin } 1/5^a$ .

Nous avons posé [module de  $5^s$ ] > 1 plus grand que 0, donc  $a$  est aussi plus grand que 0, et  $1/5^a$  est toujours plus petit que 1. Le dénominateur  $[1 - (1/5^a)^2]$  et le numérateur allant de  $(1 - 1/5^a)$  à  $(1 + 1/5^a)$  sont toujours positifs, nous pouvons simplifier pour dire que le module de  $\overrightarrow{O_{51}F_5}$  a pour valeur telle que  $1/[1 + 1/5^a] \leq \rho_{54} \leq 1/[1 - 1/5^a]$

$a$  est positif et lorsque  $a$  varie de  $> 0$  à l'infini,  $1/5^a$  est une fonction continue décroissante qui varie de  $< 1$  à 0.

Lorsque  $1/5^a$  varie de  $< 1$  à 0,  $1/[1 + 1/5^a]$  est une fonction continue croissante qui varie de  $> 1/2$  à 1, et  $1/[1 - 1/5^a]$  est une fonction continue décroissante qui varie de l'infini à 1

Il en résulte que le module du vecteur  $\overrightarrow{O_{51}F_5}$  est donc toujours supérieur à  $1/2$ .

## 5) Représentation de $[1/(1 - 1/7^s)]$

Dans le paragraphe « Représentation de  $[1/(1 - 1/2^s)]$  », nous avons démontré que le module du vecteur  $\overrightarrow{O_{21}F_2}$  est supérieur à  $1/2$

Dans le paragraphe « Représentation de  $[1/(1 - 1/3^s)]$  », nous avons démontré que cette propriété est vraie avec le nombre 3.

La propriété est vraie avec le nombre premier 2, elle est vraie avec le nombre premier suivant (le nombre 3) ; est-elle vraie avec le nombre premier suivant (le nombre 5) ?

Dans le paragraphe « Représentation de  $[1/(1 - 1/5^s)]$  », nous avons démontré que cette propriété est vraie avec le nombre 5. La propriété étant vraie pour le nombre 2, puis pour le nombre premier suivant

# L'HYPOTHESE DE RIEMANN

3, puis pour le nombre premier suivant 5 ; il en résulte que la propriété est vraie pour le nombre premier suivant 7, puis pour le nombre premier suivant 11, puis .....

## 6) Valeur de zéta

Euler a démontré la formule suivante de zéta :

$\xi(s) = [1/(1 - 1/2^s)] [+ 1/(1 - 1/3^s)] [1/(1 - 1/5^s)] [1/(1 - 1/7^s)] [.....]$ , où le module de  $s$  est plus grand que 0.

Nous avons vu que la représentation de chacun des termes  $[1/(1 - 1/2^s)]$ ,  $[+ 1/(1 - 1/3^s)]$ ,  $[1/(1 - 1/5^s)]$ ,  $[1/(1 - 1/7^s)]$ , [.....] est un vecteur de module toujours supérieur à  $1/2$ .

Nous savons que le produit de plusieurs nombres complexes, est un nombre complexe dont le module est égal au produit des modules et l'argument est égal à la somme des arguments.

Appelons  $\rho_2$  la valeur du module de  $[1/(1 - 1/2^s)]$

Appelons  $\rho_3$  la valeur du module de  $[1/(1 - 1/3^s)]$

Appelons  $\rho_5$  la valeur du module de  $[1/(1 - 1/5^s)]$

.....  
.....

Appelons  $\rho_p$  la valeur du module de  $[1/(1 - 1/p^s)]$

.....

Avec  $s = a + ib$  nous avons :

- une valeur de  $\rho_2$ , telle que  $1/[1 + 1/2^a] \leq \rho_2 \leq 1/[1 - 1/2^a]$

- une valeur de  $\rho_3$ , telle que  $1/[1 + 1/3^a] \leq \rho_3 \leq 1/[1 - 1/3^a]$

- une valeur de  $\rho_5$ , telle que  $1/[1 + 1/5^a] \leq \rho_5 \leq 1/[1 - 1/5^a]$

.....  
.....

- une valeur de  $\rho_p$ , telle que  $1/[1 + 1/p^a] \leq \rho_p \leq 1/[1 - 1/p^a]$

.....

Les représentations de ces modules sont sur une sinusoïde déformée située sur l'axe d'ordonnée égale à 1, de fréquence  $f = (b \log x)/2\pi$  et située entre les hyperboles des fonctions  $1/(1 - 1/x^a)$  et  $1/(1 + 1/x^a)$ . Lorsque  $x$  est grand, cette sinusoïde déformée tend vers une sinusoïde amortie sur l'axe d'ordonnée égale à 1 et d'amplitude tendant vers 0.

Les valeurs des modules sont toujours au moins égales à  $1/2$ .

Sur la sinusoïde déformée, les valeurs des modules sont aléatoires et fonction de  $a$  et de  $b$ , le produit de ces modules est un nombre fini qui ne peut pas être nul.

Sur la sinusoïde amortie (lorsque  $x$  est grand), les valeurs des modules tendent alternativement et progressivement vers 1; le produit de ces modules tend vers 1.

Quelles que soient les valeurs de  $a$  et de  $b$ , le produit de l'ensemble des modules tend vers une valeur finie qui ne peut en aucun cas être égale à 0. A fortiori, avec  $a = 1/2$  et quelle que soit  $b$ , la fonction zéta ne peut pas être égale à 0.

## L'hypothèse de Riemann est fausse

# Annexe

