

Par Babacar Gueye

PREUVE DE LA CONJECTURE DU COUREUR SOLITAIRE

I) INTRODUCTION

En mathématiques et plus particulièrement dans l'étude de l'approximation diophantienne, la conjecture du coureur solitaire est une conjecture due à J. M. Wills en 1967. Les applications de cette conjecture balayent de nombreux domaines des mathématiques : problèmes d'obstruction de vue, calculs de nombres chromatiques, etc. Le nom pittoresque de cette conjecture a été proposé par L. Goddyn en 1998.

La conjecture :

Considérons k coureurs sur une piste circulaire de longueur 1. Au temps $t = 0$, tous les coureurs sont à la même position et commencent à courir à des vitesses deux à deux distinctes. Un coureur est dit solitaire au temps t , s'il est à une distance d'au moins $\frac{1}{k}$ de tous les autres coureurs. La conjecture du coureur solitaire affirme que chaque coureur sera solitaire à certains moments.

C'est ce que nous allons démontrer ici.

Rappelons que cette conjecture a été démontré jusqu'au cas $k = 7$.

Propriété :

A priori, les vitesses sont des réels, mais on peut se restreindre sans perte de généralité à des rationnels ou des entiers.

On va alors ici se restreindre au cas où les vitesses sont des entiers, et proposer une démonstration dans le cas général.

II) PREUVE DE LA CONJECTURE

a) Préliminaires

Soient c_1, c_2, \dots, c_k les $k \geq 4$ coureurs et v_1, v_2, \dots, v_k , les vitesses respectives des coureurs, distinctes deux à deux et entiers naturels.

Prenons c_{i_0} , un des coureurs, de vitesse v_{i_0} .

$|v_{i_0} - v_i|$ est la vitesse de décalage entre c_{i_0} et c_i ($|x|$ est la valeur absolue de x). Ce décalage sur la piste circulaire est égal à $\frac{1}{k}$ pour la première fois à l'instant $\frac{\frac{1}{k}}{|v_{i_0} - v_i|} = \frac{1}{k|v_{i_0} - v_i|}$ et il reste supérieur à $\frac{1}{k}$ jusqu'à l'instant

$$\frac{1 - \frac{1}{k}}{|v_{i_0} - v_i|} = \frac{k-1}{k|v_{i_0} - v_i|}.$$

Donc les instants $\left[\frac{1}{k|v_{i_0} - v_i|}; \frac{k-1}{k|v_{i_0} - v_i|} \right]$ sont les premiers intervalles de temps

où c_{i_0} est à une distance $\geq \frac{1}{k}$ de c_i .

Ces intervalles de temps convenables, je veux dire où c_{i_0} est à une distance $\geq \frac{1}{k}$ de c_i , sont périodiques de période $\frac{1}{|v_{i_0}-v_i|}$ car à chaque instant $\frac{n}{|v_{i_0}-v_i|}$, $n \in \mathbb{N}$ les coureurs c_{i_0} et c_i sont au même endroit sur la piste circulaire (En effet $|v_{i_0} \cdot \frac{n}{|v_{i_0}-v_i|} - v_i \cdot \frac{n}{|v_{i_0}-v_i|}| = n$).

Les intervalles de la forme $[\frac{1+nk}{k|v_{i_0}-v_i|}; \frac{k-1+nk}{k|v_{i_0}-v_i|}]$ sont alors des intervalles de temps où c_{i_0} est à une distance $\geq \frac{1}{k}$ de c_i .

Un intervalle de temps où c_{i_0} est à une distance $\geq \frac{1}{k}$ de chacun des c_i est un intervalle non vide de la forme $\bigcap_{i \in I, n_i \in \mathbb{N}} [\frac{1+n_i k}{k|v_{i_0}-v_i|}; \frac{k-1+n_i k}{k|v_{i_0}-v_i|}]$ où les n_i sont des entiers naturels et $I = \llbracket 1, k \rrbracket \setminus \{i_0\}$.

Mais à l'instant $t = 1$ tous les k coureurs se retrouvent au point de départ, chaque coureur c_i aura fait v_i tours, le même processus entre les instants 0 et 1 se répète entre les instants 1 et 2, entre les instants 2 et 3, etc

Ceci conduit si on veut à chercher les n_i convenables, je veux dire tels que $\bigcap_{i \in I, n_i \in \mathbb{N}} [\frac{1+n_i k}{k|v_{i_0}-v_i|}; \frac{k-1+n_i k}{k|v_{i_0}-v_i|}]$ soit non vide, dans les intervalles $\llbracket 0, |v_{i_0}-v_i|-1 \rrbracket$.

On peut aussi alors pour démontrer la conjecture, se limiter à chercher un instant t_{i_0} où c_{i_0} est à une distance $\geq \frac{1}{k}$ de chacun des c_i , $i \in \llbracket 1, k \rrbracket \setminus \{i_0\}$ dans l'intervalle de temps $[0; 1]$. C'est ce qu'on va faire dans la suite.

Notons bien que dans cet intervalle de temps $[0; 1]$, les intervalles $[0; \frac{1}{k|v_{i_0}-v_i|} [$, $]\frac{nk-1}{k|v_{i_0}-v_i|}; \frac{nk+1}{k|v_{i_0}-v_i|} [$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $]\frac{k|v_{i_0}-v_i|-1}{k|v_{i_0}-v_i|}; 1]$ sont les instants où c_{i_0} est à une distance $< \frac{1}{k}$ de c_i , $i \in \llbracket 1, k \rrbracket \setminus \{i_0\}$.

On est dans l'intervalle de temps $[0; 1]$, et pour alléger les notations, on pose $|v_{i_0}-v_i| = a_i$, $\forall i \in I = \llbracket 1, k \rrbracket \setminus \{i_0\}$, $\min_{i \in I} a_i$ est le minimum des a_i , i décrivant I et $\max_{i \in I} a_i$ est le maximum des a_i , i décrivant I .

Remarquons qu'il peut y avoir des paires de a_i $i \in I$ égaux, et constatons que si c'est le cas, l'étude se ramène à un nombre inférieur à k coureurs. En effet, si par exemple $a_{i_1} = a_{i_2}$, $\{i_1, i_2\} \subset I$, alors les coureurs c_{i_1} et c_{i_2} , $\{i_1, i_2\} \subset I$ sont à une distance $\geq \frac{1}{k}$ de c_{i_0} aux mêmes moments, et donc dans l'étude on pourra se dispenser de a_{i_1} ou bien de a_{i_2} .

On cherche alors dans $[0; 1]$ un instant t_{i_0} où c_{i_0} est solitaire.

b) Preuve

Soit p un entier naturel, on s'intéresse aux valeurs de α tels que :

$$\frac{1}{k \times \min_{i \in I} a_i} \leq \frac{\alpha}{p} \leq \frac{k \times \min_{i \in I} a_i - 1}{k \times \min_{i \in I} a_i}.$$

Pour ces valeurs possibles de α , $\frac{\alpha}{p}$ appartient à un intervalle de la forme $]\frac{n_i k - 1}{k a_i}; \frac{n_i k + 1}{k a_i} [$, $n_i \in \llbracket 1, a_i - 1 \rrbracket$ si et seulement si, il existe $x \in]-1; 1[$ tel

que :

$$\frac{n_i k + x}{k a_i} = \frac{\alpha}{p} \Leftrightarrow x = \frac{(a_i \alpha - n_i p) k}{p}, n_i \in \llbracket 1, a_i - 1 \rrbracket.$$

On peut poser $p = ak + m$ avec a entier naturel et m entier naturel inférieur ou égal à $k - 1$ (la division euclidienne).

Alors $x \in]-1; 1[$ existe si et seulement si $\exists n_i \in \llbracket 1, a_i - 1 \rrbracket$ tel que $a_i \alpha - n_i p = 0$ ou ± 1 ou $\pm 2 \cdots$ ou $\pm a$ (ou plus simplement $|a_i \alpha - n_i p| \leq a$. On atteint $\pm a$ si $m \neq 0$).

Rappelons que s'il existe dans $\llbracket 1, p - 1 \rrbracket$ une valeur de α telle que $a_i \alpha - n_i p = j$, $n_i \in \llbracket 1, a_i - 1 \rrbracket$ et j nombre entier, alors il en existe qu'une seule car en règle générale, les valeurs de u et v telles que $a_i u - v p = j$ sont périodiques de périodes respectivement p et a_i .

1) S'il existe $p \leq k$, premier avec tous les a_i , $i \in I$.

On constate déjà que si on prend un entier p premier avec tous les a_i , $i \in I$, il n'existe pas d'entier naturel n_i tel que $\frac{n_i k}{k a_i} = \frac{\alpha}{p}$ où α est tel que $\frac{1}{k \times \min_{i \in I} a_i} \leq \frac{\alpha}{p} \leq \frac{k \times \min_{i \in I} a_i - 1}{k \times \min_{i \in I} a_i}$.

En effet $\frac{n_i k}{k a_i} = \frac{\alpha}{p} \Leftrightarrow n_i p = a_i \alpha$, ce qui est impossible car p premier avec a_i et $\alpha \leq p - 1$ (donc p premier avec α).

C'est-à-dire que $a_i \alpha - n_i p \neq 0$, $\forall i \in I$.

Si $p \leq k$, on a $\frac{1}{k \times \min_{i \in I} a_i} \leq \frac{\alpha}{p} \leq \frac{k \times \min_{i \in I} a_i - 1}{k \times \min_{i \in I} a_i}$ pour tout α entier allant de 1 à $p - 1$.

On a $\frac{|a_i \alpha - n_i p| k}{p} \geq 1$, $\forall i \in I$, car $a_i \alpha - n_i p \neq 0$, $\forall i \in I$ et $\frac{k}{p} \geq 1$, et ceci pour tout α allant de 1 à $p - 1$. On ne trouve alors pas de valeur de $x \in]-1; 1[$ comme ci-dessus définie, et ceci quelque soit a_i , $i \in I$.

C'est dire que $\frac{\alpha}{p}$ est un instant où c_{i_0} est solitaire pour tout α allant de 1 à $p - 1$.

Donc pour $\alpha \in \llbracket 1, p - 1 \rrbracket$, $t_{i_0} = \frac{\alpha}{p}$ convient.

lemme : Avec les notations précédentes, Si $p \leq k$, est un entier naturel premier avec tous les a_i , $i \in I$, alors pour tout $\alpha \in \llbracket 1, p - 1 \rrbracket$, $\frac{\alpha}{p}$ est un instant où c_{i_0} est solitaire.

Remarque : On peut étendre et montrer par le même raisonnement que si $p \leq k$ n'est diviseur d'aucun a_i , $i \in I$, $t_{i_0} = \frac{1}{p}$ convient.

En effet on a $a_i - n_i p \neq 0$, $\forall i \in I$.

2) Si les v_i sont consécutifs, il suffit de prendre $t_{i_0} = \frac{1}{k}$ (les a_i sont consécutifs avec a_{i_0+1} ou a_{i_0-1} égal 1)

On peut aussi dans ce cas présent utiliser d'une manière plus générale le raisonnement suivant.

Dans le cas général de k coureurs c_1, c_2, \dots, c_k de vitesses respectives v_1, v_2, \dots, v_k , on a vu ci-haut que :

$$\bigcap_{1 \leq i \leq k, i \neq i_0} \left[\frac{1 + k n_i}{k a_i}; \frac{k - 1 + k n_i}{k a_i} \right] \text{ où les } n_i \text{ sont des entiers naturels, nous}$$

donne des intervalles où c_{i_0} est solitaire quand ils sont non vides.

Si on note $\max_{i \in I} a_i = a_m$, sachant que $\frac{k-2}{ka_i}$ est la largeur des intervalles de temps où c_i est à une distance $\leq \frac{1}{k}$ de c_{i_0} , alors les n_i tels que :

$$0 \leq \frac{k-1+kn_i}{ka_i} - \frac{k-1+kn_m}{ka_m} \leq \frac{k-2}{ka_i}, \forall i \neq i_0,$$
 nous donnent des intervalles de temps où c_{i_0} est solitaire.

Après quelques transformations, la double inégalité donne :

$$\frac{n_m a_i}{a_m} + \frac{(k-1)a_i}{ka_m} - \frac{k-1}{k} \leq n_i \leq \frac{n_m a_i}{a_m} + \frac{(k-1)a_i}{ka_m} - \frac{1}{k}$$

On a que $-1 < \frac{(k-1)a_i}{ka_m} - \frac{k-1}{k} \leq 0$.

Donc si $\frac{(k-1)a_i}{ka_m} - \frac{1}{k} \geq 0$ c'est à dire $a_i \geq \frac{a_m}{k-1}, \forall i \neq i_0$,

on peut choisir : $n_m = la_m$ et $n_i = la_i, \forall i \neq i_0, l \in \mathbb{N}$, qui donne :

$$\left[l + \frac{1}{k \times \min_{i \in I} a_i}; l + \frac{k-1}{ka_m} \right]$$

comme intervalle de temps pendant lequel c_{i_0} est solitaire.

D'où le choix de $t_{i_0} = \frac{1}{k}$ dans le cas présent, correspondant au choix $l = 0$.

3) Sinon :

Il existe au moins un i_1 tel que a_{i_1+1} ou a_{i_1-1} est supérieur strictement à $a_{i_1} + 1$ (supposons que ce soit a_{i_1+1}).

Soit q un nombre entier naturel premier avec tous les $a_i, i \in I$. Alors on a $q > k$.

On prend dans chaque $a_i, i \in I \setminus \{i_1+1\}$ un facteur q_i , et $q_{i_1+1} = a_{i_1+1}$ et on pose $p = q \prod_{i \in I} q_i$.

On a $p = ak + m$ avec $a \geq 1$ entier naturel et m entier naturel inférieur ou égal à $k-1$ (par la division euclidienne).

Cherchons le nombre d'entiers naturels α tels que $\frac{1}{k \times \min_{i \in I} a_i} \leq \frac{\alpha}{p} \leq \frac{k \times \min_{i \in I} a_i - 1}{k \times \min_{i \in I} a_i}$, c'est-à-dire tels que $\frac{p}{k \times \min_{i \in I} a_i} \leq \alpha \leq \frac{p(k \times \min_{i \in I} a_i - 1)}{k \times \min_{i \in I} a_i}$.

L'intervalle $A = \left[\frac{p}{k \times \min_{i \in I} a_i}; \frac{p(k \times \min_{i \in I} a_i - 1)}{k \times \min_{i \in I} a_i} \right]$ est de longueur $L = \frac{p(k \times \min_{i \in I} a_i - 2)}{k \times \min_{i \in I} a_i} = p - \frac{2p}{k \times \min_{i \in I} a_i} = ak + m - \frac{2a}{\min_{i \in I} a_i} - \frac{2m}{k \times \min_{i \in I} a_i}$.

•) Si $\min_{i \in I} a_i = 1$.

$$L = ak + m - 2a - \frac{2m}{k} = (k-2)a + m - \frac{2m}{k}.$$

Donc le nombre d'entiers naturels α cherché est \geq à $(k-2)a$.

•) Si $\min_{i \in I} a_i \geq 2$. $L \geq ak + m - a - \frac{m}{k} = (k-1)a + m - \frac{m}{k}$.

Donc le nombre d'entiers naturels α cherché est \geq à $(k-1)a$.

a) Soit $\min_{i \in I} a_i = 1$.

Alors $\min_{i \in I} a_i - 1 = 0$. Il n'existe pas d'entier naturel n supérieur ou égal à 1 et inférieur ou égal à 0. Donc il n'existe pas un entier naturel n convenable au sens que pour une valeur de α , $\alpha \min_{i \in I} a_i - n p = 0$ ou ± 1 ou $\pm 2 \cdots$ ou $\pm a$. Pour les $k-2$ termes a_i , $i \in I$ restants, $\alpha a_i - n_i p$ prend au plus les valeurs $0, \pm q_i, \pm 2q_i, \dots, \pm m_i q_i$ avec $m_i q_i \leq a$, c'est-à-dire m_i entier $\leq \frac{a}{q_i}$.

Les a_i étant deux à deux différents, les q_i peuvent être choisis deux à deux différents.

Donc les $k-2$ termes a_i , $i \in I$ prennent au plus $k-2+2(\frac{a}{2}+\frac{a}{3}+\dots+\frac{a}{i_1}+\frac{a}{a_{i_1+1}}+\frac{a}{i_1+2}+\dots+\frac{a}{k-2})$ valeurs de α tels que $\alpha a_i - n_i p = 0$ ou ± 1 ou $\pm 2 \cdots$ ou $\pm a$.

$$k-2+2(\frac{a}{2}+\frac{a}{3}+\dots+\frac{a}{i_1}+\frac{a}{a_{i_1+1}}+\frac{a}{i_1+2}+\dots+\frac{a}{k-2})$$

$$= k-2+2a(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{i_1}+\frac{1}{a_{i_1+1}}+\frac{1}{i_1+2}+\dots+\frac{1}{k-2})$$

$$= k-2+2a(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{k-2}+\frac{1}{a_{i_1+1}}-\frac{1}{i_1+1})$$

$$= k-2+2a(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{k-2})+2a\frac{(i_1+1)-a_{i_1+1}}{(i_1+1)a_{i_1+1}}$$

Et remarquons qu'on a $2a\frac{(i_1+1)-a_{i_1+1}}{(i_1+1)a_{i_1+1}} < -1$.

Par ailleurs :

$k-2+2a(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{k-2}) = k-2+2a(H_{k-2}-1)$, où H_{k-2} est la $(k-2)$ ième somme partielle de la série harmonique $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots$.

On a que $H_{k-2} \leq 1+\ln(k-2)$ c'est-à-dire $H_{k-2}-1 \leq \ln(k-2)$, et donc $k-2+2a(H_{k-2}-1) \leq k-2+2a\ln(k-2)$.

Montrons que $k-2+2a\ln(k-2) < (k-2)a$ si $k \geq 4$.

En effet on a, $k-2+2a\ln(k-2) < (k-2)a \Leftrightarrow \frac{\ln(k-2)}{k-2} < \frac{a-1}{2a}$.

La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est décroissante sur $[e; +\infty[$ et la fonction $x \mapsto \frac{x-1}{2x}$ est croissante sur $]0; +\infty[$.

Si $k \geq 5$, on a alors $a \geq 2 \times 3 \times 4 = 24$ et donc $\frac{a-1}{2a} \geq \frac{23}{48}$. On a $\frac{\ln(3)}{3} < \frac{23}{48}$, alors pour tout $k \geq 5$, on a $\frac{\ln(k-2)}{k-2} \leq \frac{\ln(3)}{3} < \frac{23}{48} \leq \frac{a-1}{2a}$, c'est-à-dire $k-2+2a\ln(k-2) < (k-2)a$.

Si $k = 4$, on a alors $a \geq 2 \times 3 = 6$, et donc $\frac{a-1}{2a} \geq \frac{5}{12}$. On a $\frac{\ln(2)}{2} < \frac{5}{12}$, alors pour $k = 4$, on a aussi $\frac{\ln(k-2)}{k-2} < \frac{a-1}{2a}$, c'est-à-dire $k-2+2a\ln(k-2) < (k-2)a$.

Et donc pour $k \geq 4$:

$$k-2+2a(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{i_1}+\frac{1}{a_{i_1+1}}+\frac{1}{i_1+2}+\dots+\frac{1}{k-2})+1 < k-2+2a\ln(k-2) < (k-2)a.$$

C'est dire que pour $k \geq 4$, on a $k-2+2a(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{i_1}+\frac{1}{a_{i_1+1}}+\frac{1}{i_1+2}+\dots+\frac{1}{k-2}) < (k-2)a-1$.

Sachant qu'on a un nombre inférieur à $k-2+2a(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{i_1}+\frac{1}{a_{i_1+1}}+\frac{1}{i_1+2}+\dots+\frac{1}{k-2})$ valeurs de α telles qu'il existe (a_i, n_i) , $i \in I$ tel que $|\alpha a_i - n_i p| \leq a$, il existe alors au moins une valeur entière de α , soit α_0 telle que $|\alpha_0 a_i - n_i p| > a, \forall i \in I$. Et donc à l'instant $\frac{\alpha_0}{p}$, c_{i_0} est solitaire.

$t_{i_0} = \frac{\alpha_0}{p}$ convient.

b) Soit $\min_{i \in I} a_i \geq 2$.

On a montré que le nombre de valeurs de α convenables est $\geq (k-1)a$.

On tient le même raisonnement que ci-dessus pour montrer qu'on a :

$k-1 + 2a(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{i_1} + \frac{1}{a_{i_1+1}} + \frac{1}{i_1+2} + \dots + \frac{1}{k-1}) < (k-1)a - 1$ si $k \geq 4$.

En effet si $k \geq 4$, on a $a \geq 2 \times 3 \times 4 = 24$, et donc $\frac{\ln(k-1)}{k-1} \leq \frac{\ln(3)}{3} < \frac{23}{48} \leq \frac{a-1}{2a}$, d'après les remarques sur les deux fonctions définies ci-dessus.

Et alors pour tout $k \geq 4$, on a $\frac{\ln(k-1)}{k-1} < \frac{a-1}{2a}$, c'est-à-dire, $k-1 + 2a \ln(k-1) < (k-1)a$.

Sachant qu'on a un nombre inférieur à $k-1 + 2a(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{i_1} + \frac{1}{a_{i_1+1}} + \frac{1}{i_1+2} + \dots + \frac{1}{k-1})$ valeurs de α telles qu'il existe (a_i, n_i) , $i \in I$ tel que $|\alpha a_i - n_i p| \leq a$, et $k-1 + 2a(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{i_1} + \frac{1}{a_{i_1+1}} + \frac{1}{i_1+2} + \dots + \frac{1}{k-1}) < (k-1)a - 1$ (obtenu avec le même raisonnement que ci-haut), il existe alors au moins une valeur entière de α , soit α_0 telle que $|\alpha_0 a_i - n_i p| > a$, $\forall i \in I$, c'est-à-dire telle que $\frac{\alpha_0}{p}$ est un instant où c_{i_0} est solitaire. $t_{i_0} = \frac{\alpha_0}{p}$ convient.

On a ainsi démontré que pour $k \geq 4$, pour $i_0 \in \llbracket 1, k \rrbracket$, il existe $p \in \mathbb{N}$ et au moins un entier $\alpha_0 \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ tels qu'aux instants $\frac{\alpha_0}{p}, \frac{\alpha_0}{p} + 1, \frac{\alpha_0}{p} + 2, \dots$, c_{i_0} est à une distance $\geq \frac{1}{k}$ de tous les autres coureurs. Par conséquent :

Théorème :

Considérons $k \geq 4$ coureurs sur une piste circulaire de longueur 1. Au temps $t = 0$, tous les coureurs sont à la même position et commencent à courir à des vitesses (entiers naturels) deux à deux distinctes.

Alors chaque coureur sera à une distance d'au moins $\frac{1}{k}$ de tous les autres coureurs à certains moments.

Conséquence : Pour tout nombre de coureurs k , la conjecture est vraie.

III) EXEMPLE

Considérons le cas de $k = 8$ coureurs c_1, c_2, \dots, c_8 de vitesses respectives $v_1 = 1, v_2 = 4, v_3 = 8, v_4 = 13, v_5 = 20, v_6 = 30, v_7 = 47, v_8 = 100$.

• Soit $v_{i_0} = v_1 = 1$.

On a alors $a_2 = 3, a_3 = 7, a_4 = 12 = 2^2 \times 3, a_5 = 19, a_6 = 29, a_7 = 46 = 2 \times 23, a_8 = 99 = 3^2 \times 11$.

$p = 5$ est un nombre entier $\leq k = 8$ et premier avec tous les a_i . Donc d'après le lemme $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$, et $\frac{4}{5}$, sont des instants où c_1 est solitaire.

Vérifions pour $t_{i_0} = \frac{1}{5}$. On a, en notant d_i la distance parcourue par c_i sur la piste circulaire :

$$d_1 = \frac{1}{5}, d_2 = \frac{4}{5}, d_3 = \frac{8}{5} = 1 + \frac{3}{5}, d_4 = \frac{13}{5} = 2 + \frac{3}{5}, d_5 = \frac{20}{5} = 4, d_6 = \frac{30}{5} = 6, \\ d_7 = \frac{47}{5} = 9 + \frac{2}{5} \text{ et } d_8 = \frac{100}{5} = 20.$$

On voit bien que c_1 est à une distance égale à $\frac{1}{5} > \frac{1}{8}$ des coureurs les plus proches.

• Soit $v_{i_0} = v_2 = 4$.

$$\text{On a alors } a_1 = 3, a_3 = 2^2, a_4 = 3^2, a_5 = 2^4, a_6 = 2 \times 13, a_7 = 43, \\ a_8 = 2^5 \times 3.$$

Là aussi $p = 5$ est un nombre entier $\leq k = 8$ et premier avec tous les a_i .
Donc d'après le lemme $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$ et $\frac{4}{5}$, sont des instants où c_2 est solitaire.

Vérifions pour $t_{i_0} = \frac{1}{5}$. On a, en notant d_i la distance parcourue par c_i sur la piste circulaire :

$$d_1 = \frac{1}{5}, d_2 = \frac{4}{5}, d_3 = \frac{8}{5} = 1 + \frac{3}{5}, d_4 = \frac{13}{5} = 2 + \frac{3}{5}, d_5 = \frac{20}{5} = 4, d_6 = \frac{30}{5} = 6, \\ d_7 = \frac{47}{5} = 9 + \frac{2}{5} \text{ et } d_8 = \frac{100}{5} = 20.$$

On voit bien que c_2 est à une distance égale à $\frac{1}{5} > \frac{1}{8}$ des coureurs les plus proches.

• Soit $v_{i_0} = v_3 = 8$.

$$\text{On a alors } a_1 = 7, a_2 = 2^2, a_4 = 5, a_5 = 2^2 \times 3, a_6 = 2 \times 11, a_7 = 3 \times 13, \\ a_8 = 2^2 \times 23.$$

On ne trouve pas de nombre entier naturel ≤ 8 et premier avec tous les a_i , mais 8 n'est diviseur d'aucun a_i , donc d'après la remarque ; à l'instant $t_{i_0} = \frac{1}{8}$, le coureur c_3 est solitaire. En effet, on a :

$$d_1 = \frac{1}{8}, d_2 = \frac{4}{8}, d_3 = \frac{8}{8} = 1, d_4 = \frac{13}{8} = 1 + \frac{5}{8}, d_5 = \frac{20}{8} = 2 + \frac{4}{8}, d_6 = \frac{30}{8} = 3 + \frac{6}{8}, \\ d_7 = \frac{47}{8} = 6 + \frac{7}{8}, d_8 = \frac{100}{8} = 12 + \frac{4}{8}$$

On voit bien que c_3 est à une distance égale à $\frac{1}{8}$ des coureurs les plus proches.

• Soit $v_{i_0} = v_4 = 13$.

$$\text{On a alors } a_1 = 2^2 \times 3, a_2 = 3^2, a_3 = 5, a_5 = 7, a_6 = 17, a_7 = 2 \times 17, \\ a_8 = 3 \times 29.$$

Là aussi on ne trouve pas de nombre entier naturel ≤ 8 et premier avec tous les a_i , mais 8 n'est diviseur d'aucun a_i , donc d'après la remarque, à l'instant $t_{i_0} = \frac{1}{8}$, le coureur c_4 est solitaire. En effet, on a :

$$d_1 = \frac{1}{8}, d_2 = \frac{4}{8}, d_3 = \frac{8}{8} = 1, d_4 = \frac{13}{8} = 1 + \frac{5}{8}, d_5 = \frac{20}{8} = 2 + \frac{4}{8}, d_6 = \frac{30}{8} = 3 + \frac{6}{8}, \\ d_7 = \frac{47}{8} = 6 + \frac{7}{8}, d_8 = \frac{100}{8} = 12 + \frac{4}{8}$$

On voit bien que c_4 est à une distance égale à $\frac{1}{8}$ des coureurs les plus proches.

• Soit $v_{i_0} = v_5 = 20$.

$$\text{On a alors } a_1 = 19, a_2 = 2^4, a_3 = 2^2 \times 3, a_4 = 7, a_6 = 2 \times 5, a_7 = 3^3, \\ a_8 = 2^4 \times 5.$$

Dans ce cas on ne peut pas utiliser le lemme, ni la remarque. $q = 11$ est un nombre entier naturel premier avec tous le a_i .

$$\text{On pose alors } p = 11 \times \prod_{i \in I} q_i = 11 \times 19 \times 2 \times 3 \times 7 \times 5 \times 3^2 \times 2^2 = 1580040. \\ \min_{i \in I} a_i = 7.$$

$$\frac{1}{8 \times 7} \leq \frac{\alpha}{1580040} \leq \frac{8 \times 7 - 1}{8 \times 7} \Leftrightarrow 28215 \leq \alpha \leq 1551825.$$

$\frac{p}{k} = a = \frac{1580040}{8} = 197505$. On a $\max_{i \in I} a_i = a_8 = 2^4 \times 5$ et $28215 \times \max_{i \in I} a_i - p = 28215 \times 2^4 \times 5 - 1580040 = -677160 < -a = -197505$. Donc $28215 \times a_i - n_i p < -a, \forall i \in I$ (c'est-à-dire $|28215 \times a_i - n_i p| > a, \forall i \in I$). On a ainsi trouvé que $\alpha_0 = 28215$ est une valeur convenable, au sens qu'à l'instant $t_{i_0} = \frac{\alpha_0}{p} = \frac{28215}{1580040} = \frac{1}{56}$ le coureur c_5 est solitaire.

En effet on a :

$$d_1 = \frac{1}{56}, d_2 = \frac{4}{56}, d_3 = \frac{8}{56}, d_4 = \frac{13}{56}, d_5 = \frac{20}{56}, d_6 = \frac{30}{56}, d_7 = \frac{47}{56}, d_8 = \frac{100}{56} = 1 + \frac{44}{56}.$$

On voit bien que c_4 est le coureur le plus proche de c_5 et il est à une distance égale à $\frac{1}{8}$ de c_5 .

• Soit $v_{i_0} = v_6 = 30$.

On a alors $a_1 = 29, a_2 = 2 \times 13, a_3 = 2 \times 11, a_4 = 17, a_5 = 2 \times 5, a_7 = 17, a_8 = 2 \times 5 \times 7$.

$p = 3$ est un nombre entier $\leq k = 8$ et premier avec tous les a_i . Donc d'après le lemme $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ sont des instants où c_6 est solitaire.

Vérifions pour $t_{i_0} = \frac{2}{3}$. On a :

$$d_1 = \frac{2}{3}, d_2 = \frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}, d_3 = \frac{16}{3} = 5 + \frac{1}{3}, d_4 = \frac{26}{3} = 8 + \frac{2}{3}, d_5 = \frac{40}{3} = 13 + \frac{1}{3}, d_6 = \frac{60}{3} = 20, d_7 = \frac{94}{3} = 31 + \frac{1}{3} \text{ et } d_8 = \frac{200}{3} = 66 + \frac{2}{3}.$$

On voit bien que c_6 est à une distance égale à $\frac{1}{3} > \frac{1}{8}$ des autres coureurs.

• Soit $v_{i_0} = v_7 = 47$.

On a alors $a_1 = 2 \times 23, a_2 = 43, a_3 = 3 \times 13, a_4 = 2 \times 17, a_5 = 3^3, a_6 = 17, a_8 = 53$.

Là aussi $p = 5$ est un nombre entier $\leq k = 8$ et premier avec tous les a_i . Donc d'après le lemme $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$ et $\frac{4}{5}$ sont des instants où c_7 est solitaire.

Vérifions pour $t_{i_0} = \frac{3}{5}$. On a :

$$d_1 = \frac{3}{5}, d_2 = \frac{12}{5} = 2 + \frac{2}{5}, d_3 = \frac{24}{5} = 4 + \frac{4}{5}, d_4 = \frac{39}{5} = 7 + \frac{4}{5}, d_5 = \frac{60}{5} = 12, d_6 = \frac{90}{5} = 18, d_7 = \frac{141}{5} = 28 + \frac{1}{5} \text{ et } d_8 = \frac{300}{5} = 60.$$

On voit bien que c_7 est à une distance égale à $\frac{1}{5} > \frac{1}{8}$ des coureurs les plus proches.

• Soit $v_{i_0} = v_8 = 100$.

On a alors $a_1 = 3^2 \times 11, a_2 = 2^5 \times 3, a_3 = 2^2 \times 23, a_4 = 3 \times 29, a_5 = 2^4 \times 5, a_6 = 2 \times 5 \times 7, a_7 = 53$.

Dans ce cas on ne peut pas utiliser le lemme, ni la remarque. $q = 13$ est un nombre entier naturel premier avec tous les a_i .

On pose alors $p = 13 \times (\prod_{i \in I} q_i) = 13 \times (11 \times 2 \times 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 53) = 6366360$. $\min_{i \in I} a_i = 53$.

$$\frac{1}{8 \times 53} \leq \frac{\alpha}{6366360} \leq \frac{8 \times 53 - 1}{8 \times 53} \Leftrightarrow 15015 \leq \alpha \leq 6351345.$$

$\frac{p}{k} = a = \frac{6366360}{8} = 795795$. On a $\max_{i \in I} a_i = a_1 = 3^2 \times 11$ et $15015 \times \max_{i \in I} a_i - p = 15015 \times 3^2 \times 11 - 6366360 = -4879875 < -a = -795795$.

Donc $15015 \times a_i - n_i p < -a$, $\forall i \in I$ (c'est-à-dire $|15015 \times a_i - n_i p| > a$, $\forall i \in I$). On a ainsi trouvé que $\alpha_0 = 15015$ est une valeur convenable, au sens qu'à l'instant $t_{i_0} = \frac{\alpha_0}{p} = \frac{15015}{6366360} = \frac{1}{424}$ le coureur c_8 est solitaire.

En effet on a :

$$d_1 = \frac{1}{424}, d_2 = \frac{4}{424}, d_3 = \frac{8}{424}, d_4 = \frac{13}{424}, d_5 = \frac{20}{424}, d_6 = \frac{30}{424}, d_7 = \frac{47}{424}, d_8 = \frac{100}{424}.$$

On voit bien que c_7 est le coureur le plus proche de c_8 et il est à une distance égale à $\frac{1}{8}$ de c_8 .

Pour ce dernier cas on pouvait aussi remarquer le fait suivant (relatif à l'étude fait en 2)) :

on vérifie bien que, $\min_{i \neq 8} a_i = |v_8 - v_7| = 53 \geq \frac{\max_{i \neq 8} a_i}{7} = \frac{a_1}{7} = \frac{99}{7} = 14,14\dots$

Alors en prenant $n_1 = 99, n_2 = 96, n_3 = 92, n_4 = 87, n_5 = 80, n_6 = 70$ et $n_7 = 53$ ($l = 1$), on obtient l'intervalle convenable

$$\left[\frac{425}{424}; \frac{799}{792} \right].$$

On pouvait aussi prendre $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = n_6 = n_7 = 0$ ($l = 0$), pour avoir comme prévu l'intervalle

$$\left[\frac{1}{424}; \frac{7}{792} \right] \text{ pendant lequel aussi } c_8 \text{ est solitaire.}$$

Auteur : Babacar Gueye

Professeur contractuel de mathématiques au lycée de Sébikhotane

e-mail :gbabacar155@yahoo.fr

Tel :221 77 651 49 09

.....
Références :

- Les notes ont été partiellement prises dans WIKIPEDIA.
- Pour de plus amples informations sur la conjecture du coureur solitaire, on peut consulter la page WIKIPEDIA qu'on retrouve en tapant dans google "la conjecture du coureur solitaire".
- WIKIPEDIA, taper "la série harmonique".